BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ОЦЕНКИ РЕЗОЛЬВЕНТ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОР – ФУНКЦИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э.Б.СУЛТАНОВА
Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе устанавливаются оценки резольвент некоторых оператор-функций, действующих в банаховом пространстве. Такие оценки играют важную роль при изучении полноты и базисности системы собственных и присоединенных элементов оператор-функций с точечным спектром. Здесь важно отметить, что операторный коэффициент при наивысшей степени спектрального параметра является спектральным оператором.

Как известно, класс спектральных операторов был введен и изучен Н.Данфордом и его сотрудниками [1]. Благодаря счетной аддитивности разложения единицы спектрального оператора со счетным спектром, всякий элемент имеет безусловно сходящееся разложение с помощью спектральных мер.

Пусть X - банахово пространство. Рассмотренные все операторы в настоящей работе являются линейными ограниченными операторами. Более точные условия на эти операторы будут наложены ниже.

Лемма 1. Пусть S является спектральным оператором скалярного типа и S^m компактен при некотором натуральном m. Если $\sigma(S) = \{\lambda_j\}$ $(j = 1,2,...)$ и d_j -расстояние от точки $\lambda_j \in \sigma(T)$ до множества $\sigma(S) \setminus \{\lambda_j\}$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{-1} < \infty ,$$

то

$$\left\| (S - \lambda I)^{-1} \right\| \le M, \quad M = const \tag{1}$$

при $\lambda \notin \sigma(S)$.

Доказательство. По предположению S^m является компактным оператором. Отсюда следует, что спектр $\sigma(S)$ состоит только из собственных значений, причем каждое собственное значение конечно - кратно, а соответствующее подпространство, порожденное собственными и присоединенными элементами оператора S, конечномерно и возможной предельной точкой $\sigma(S)$ может быть только точка нуль.

По условию S является спектральным оператором скалярного типа. Его разложение единицы обозначим через $E(\cdot)$. Тогда оператор S можно представить в виде

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E(\lambda_j) . \qquad (2)$$

Если $\lambda \notin \sigma(S)$, то из (2) получаем

$$(S - \lambda \mathrm{I})^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} E(\lambda_j). \qquad (3)$$

Теперь, учитывая равномерную ограниченность любых конечных сумм проекторов $E(\lambda_j)$, соответствующих точкам λ_j из $\sigma(S)$ (см. напр. [1], стр.344), и используя (3) получаем справедливость леммы.

Важным является также следующее утверждение:

Лемма 2. Пусть S - такой же оператор, как и в лемме 1. Дополнительно предположим, что спектр оператора S лежит на лучах

$$\alpha_k = \left\{ z : \arg z = \frac{k\pi}{m} \right\} \quad (k = 0,1,\dots,m-1) .$$

Тогда для любого ε $(0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2m})$ во всех точках λ из области, получаемой из комплексной плоскости удалением углов

$$\frac{\pi k}{m} - \varepsilon < \arg z < \frac{\pi k}{m} + \varepsilon \qquad (k = 0,1,\dots,m-1) ,$$

верно неравенство

$$\left\| \lambda^i (\mathrm{I} - \lambda^m S^m)^{-1} S^i \right\| \le C \ , C = const, \quad i = 0,1,\dots,m-1 .$$

Доказательство. Если

$$\lambda^m \in K = \{ z : \varepsilon \le |\arg z| \le \pi - \varepsilon \},$$

то

$$\left| \arg \lambda^{-1} - \frac{k\pi}{m} \right| \ge \varepsilon, \qquad k = 0,1,\dots,2m-1$$

и, в силу (1),

$$\left\| (\mathrm{I} - \lambda \alpha_j S)^{-1} \right\| \le M \ , \ (j = 1,2,\dots,m) \quad , \qquad (4)$$

где α_j $(j = 1,2,\dots,m)$- корни n-й степени из единицы.

Учитывая оценку (4) и тождество

$$\lambda(\mathrm{I}-\lambda S)^{-1}S=(\mathrm{I}-\lambda S)^{-1}-\mathrm{I}$$

получаем, что для $\lambda^m \in K$

$$\left\|\lambda(\mathrm{I}-\lambda\alpha_j S)^{-1}S\right\|=\left\|(\mathrm{I}-\lambda\alpha_j S)^{-1}\lambda\alpha_j\cdot\alpha_j^{-1}S\right\|=\left\|\alpha_j^{-1}\left[(\mathrm{I}-\lambda\alpha_j S)^{-1}-\mathrm{I}\right]\right\|\le$$

$$\le\left\|(\mathrm{I}-\lambda\alpha_j S)^{-1}\right\|+1\le C_1\ ,\quad C_1=const,\quad j=1,2,...,m\ .$$

Отсюда для $\lambda^m \in K$ имеем

$$\left\|\lambda^j(\mathrm{I}-\lambda^m S^m)^{-1}S^j\right\|\le\left\|(\mathrm{I}-\lambda\alpha_1 S)^{-1}\lambda S\right\|\cdots\left\|(\mathrm{I}-\lambda\alpha_j S)^{-1}\lambda S\right\|\cdot\left\|(\mathrm{I}-\lambda\alpha_{j+1}S)^{-1}\right\|\cdots$$

$$\cdots\left\|(\mathrm{I}-\lambda\alpha_m S)^{-1}\right\|\le C\ ,\quad C=const.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любого компактного оператора A при условиях леммы 2 верно

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{|\lambda|=r}\left\|\lambda^j\left(\mathrm{I}-\lambda^m S^m\right)^{-1}SA\right\|=0\qquad(j=1,2,...,m-1)\quad. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\lambda^m \in K$, где

$$K=\left\{z:\varepsilon\le\left|\arg z\right|\le\pi-\varepsilon\right\}.$$

Тогда из леммы 2 следует, что

$$\left\|\lambda^j S^j(\mathrm{I}-\lambda^m S^m)^{-1}\right\|\le C,\qquad C=const. \tag{6}$$

Для доказательства соотношения (5) сначала покажем, что

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\substack{|\lambda|=r\\ \lambda^m\in K}}\left\|\lambda^j\left(\mathrm{I}-\lambda^m S^m\right)^{-1}S^j y\right\|=0\ ,\quad(j=1,2,...,m-1) \tag{7}$$

для любого $y\in X$.

По условию оператор S является спектральным оператором скалярного типа и S^m компактен. Тогда область значений оператора S всюду плотна в пространстве X . Поэтому для установления соотношения (7) можно ограничиться случаем, когда

$$y=S^m x\qquad(x\in X).$$

Если учесть, что

$$\lambda^j(\mathrm{I}-\lambda^m S^m)^{-1}S^j y=\lambda^{j-1}\left[(\mathrm{I}-\lambda^m S^m)^{-1}-\mathrm{I}\right]S^j x,$$

то из (6) непосредственно вытекает (7).

Пусть α - произвольное положительное число и $y_1,y_2,...,y_k$ - некоторая $\dfrac{\alpha}{2C}$ - сеть множества $A(s)$, где s -единичный шар пространства X . В силу (7) можно выбрать такое число r , что

$$\left\| \lambda^j (\mathrm{I} - \lambda^m S^m)^{-1} S^j y_j \right\| < \frac{\alpha}{2} \qquad (\lambda^m \in K, \quad |\lambda| \geq r, \ i = 1,2,\ldots,k\ ). \qquad (8)$$

Из (6) и (8) следует, что для любого элемента $x \in s$

$$\left\| \lambda^j (\mathrm{I} - \lambda^m S^m)^{-1} S^j A x \right\| < \alpha \qquad (\lambda^m \in K, \quad |\lambda| \geq r\ ),$$

откуда и вытекает (7). Этим завершается доказательство настоящей леммы.

Теперь рассмотрим операторный пучок

$$S(\lambda) = \mathrm{I} - A_0 - \lambda S A_1 - \ldots - \lambda^{m-1} S^{m-1} A_{m-1} - \lambda^m S^m \ . \qquad (9)$$

Верна следующая

Теорема. Пусть S - такой же оператор, как и в лемме 2. Если A_i $(i = 0,1,\ldots,m-1)$ - компактные операторы, то существуют положительные числа r_0 и C_0, такие, что оператор $S(\lambda)$ из (9) ограниченно- обратим при $\lambda^m \in K$, $|\lambda| \geq r_0$, причем

$$\left\| S^{-1}(\lambda) \right\| \leq C_0 \qquad (\lambda^m \in K, \ |\lambda| \geq r_0).$$

Доказательство. Легко видеть, что пучок $S(\lambda)$ для $\lambda^m \in K$ можно записать в виде

$$S(\lambda) = (\mathrm{I} - \lambda^m S^m) \left[\mathrm{I} - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j \left(\mathrm{I} - \lambda^m S^m \right)^{-1} S_j A_j \right]. \qquad (10)$$

Разложим оператор- функцию $\lambda^j S^j (\mathrm{I} - \lambda^m S^m)^{-1}$ на множители:

$$\lambda^j S^j (\mathrm{I} - \lambda^m S^m)^{-1} = \left[\lambda(\mathrm{I} - \lambda\alpha_1 S)^{-1} S\right] \cdots \left[\lambda(\mathrm{I} - \lambda\alpha_j S)^{-1} S\right] (\mathrm{I} - \lambda\alpha_{j+1} S)^{-1} \ldots (\mathrm{I} - \lambda\alpha_m S)^{-1} \qquad (11)$$

$(j = 1,2,\ldots,m)$,

где $\alpha_i^m = 1, \ i = 1,2,\ldots,m$.

Теперь, поступая так же, как и в лемме 3, можно показать, что

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{\substack{|\lambda| = r \\ \lambda^m \in K}} \left\| \lambda^j \left(\mathrm{I} - \lambda^m S^m \right)^{-1} S A_j \right\| = 0\ , \quad (j = 1,2,\ldots,m-1). \qquad (12)$$

Из соотношений (10) и (12) следует существование положительных чисел r_0 и C_0, таких, что оператор $S^{-1}(\lambda)$ существует и ограничен при $\lambda^m \in K$, $|\lambda| \geq r_0$, причем $\left\| S^{-1}(\lambda) \right\| \leq C_0$ $(\lambda^m \in K$, $|\lambda| \geq r_0)$. Этим теорема доказана.

Замечание. Отметим, что вопросам поведения резольвент операторных пучков в окрестности особой точки и связанным с ним спектральным вопросам (напр., теоремы полноты системы собственных и присоединенных элементов) в банаховом пространстве посвящены не много работ. Но, среди имеющихся работ, особо отличаются работы [1] - [4], в которых, в отличие от настоящей работы, невозмущенные операторы в рассмотренных ими пучках взяты из более узких классов операторов.

В заключение выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю академику Дж.Э.Аллахвердиеву за постановку задачи и профессору А.М.Ахмедову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы (Спектральные операторы). Изд.-во «Мир», Москва, 1974, 662 стр.
2. Аллахвердиев Дж.Э. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, являющихся рациональными функциями параметра. ДАН СССР, 159, №5, 1964,стр.951-955.
3. Ахмедов А.М. Некоторые вопросы спектральной теории вполне непрерывных операторов в банаховом пространстве, рационально зависящих от параметра. Кандидатская диссертация, Баку, 1970, 45 стр.
4. Маркус А.С. К спектральной теории полиномиальных операторных пучков в банаховом пространстве. Сибирский математический журнал, т.VIII, №6, 1967, стр. 1346-1369.

BƏZİ OPERATOR FUNKSİYALARIN REZOLVENTLƏRİNİN BANAX FƏZASINDA QİYMƏTLƏNDİRMƏLƏRİ

E.B.SULTANOVA

XÜLASƏ

İşdə Banax fəzasında təsir edən müəyyən operator funksiyaların rezolventlərinin qiymətləndirmələri öyrənilir. Bu qiymətləndirmələr nöqtəvi spektrə malik olan operator funksiyaların məxsusi və qoşma elementləri sisteminin tamlıq və bazisliyinin öyrənilməsində mühüm rol oynayırlar. Burada qeyd etmək lazımdır ki, spektral parametrin ən yüksək dərəcəsinin əmsalı spektral operatordur.

ESTIMATIONS OF RESOLVENTS OF SOME OPERATOR FUNCTIONS IN BANACH SPACE

E.B.SULTANOVA

SUMMARY

In this work estimations of resolvent of some operator functions, acting in Banach space are established. Such estimations play main role to the establishing completeness and basisity of the system of eigen – and adjoint elements of operator functions with point spectrum. Here it is necessary to note that the operator coefficient of high order of spectral parameter is a spectral operator.